

# Error entre metodologías de integración Euler y Runge-Kutta 4 orden mediante hoja de cálculo en un proceso de Newton calentamiento-enfriamiento.

M. C. Oscar Hernández Ibarra

Departamento de Ingeniería Petrolera I.T.E.S.R.C.

## **Resumen**

Dos metodologías de integración Euler y Runge-Kutta 4 orden empleando hoja de cálculo se analizan en este trabajo. Se propone el empleo de estas metodologías en la solución de una ecuación diferencial aplicada a un problema específico, un objeto calentándose en un medio circundante empleando para ello la ley de enfriamiento-calentamiento de Newton. El empleo de la hoja de cálculo se sugiere como una alternativa en el proceso de enseñanza aprendizaje del estudiante y se plantea como herramienta en la solución numérica de ecuaciones diferenciales sin tener que enfrentarse a la problemática de lenguajes de programación estructurada y robusta además de códigos especiales de programación.

## **1.- Introducción**

En un sistema enfriamiento-calentamiento de un objeto cuya resistencia térmica es menor relativamente a su resistencia térmica superficial, la razón de cambio de temperatura del objeto con respecto a al medio circundante es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio queda establecida por la siguiente ecuación diferencial:

$$T' = \bar{\alpha}(T_s - T), \quad T(0) = T_0, \quad (1)$$

donde  $T'$  es la derivada de la temperatura del objeto con respecto a al tiempo,  $\alpha$  prima es constante de proporcionalidad,  $T$  es la temperatura del medio circundante y  $T_0$  es la temperatura inicial del objeto cuando es expuesto en el medio circundante.

Es bien sabido que la solución analítica de esta ecuación diferencial es la eq 2.

$$T(t) = T_s - (T_s - T_0)e^{-\bar{\alpha}t}. \quad (2)$$

Por otra parte existen técnicas numéricas que proponen la solución de ecuaciones diferenciales con valor inicial como las Metodologías de Euler y Runge-Kutta 1 2 3 y 4 orden entre otras. En este trabajo se contrasta el empleo de las dos metodologías mayormente empleadas la de Euler por ser relativamente la más sencilla y la de Runge-Kutta 4 orden por ser una metodología que considera un cierto número de parámetros en su solución. Se propone el empleo de hojas de cálculo como excel® por ser una herramienta digital de uso común, y que no requiere un tipo de programación estructurada y que es relativamente sencillo establecer operaciones para la realización de cálculos numéricos complejos. Así también el empleo de esta herramienta es la omisión de lenguajes de programación estructurada como fortran, basic, visual basic, turbo pascal etc. La ecuación 2 es la solución analítica y sirve de base en nuestro contraste de métodos.

## 2.- Desarrollo

En la figura 1 se muestra el algoritmo de las metodologías analizadas [1]. En la Tabla 1 se presenta las formulas empleadas, cabe decir que solo basta establecer las ecuaciones bases en el primer renglón y en los demás hasta el numero de iteraciones deseado en este caso 1000, la hoja de cálculo lo realiza de forma automática.

En la figura 3 presenta a manera de gráfico los datos de la tabla en la figura 2, el método de Euler, RGK 4 orden, analítico, errores absoluto porcentual entre los métodos numéricos de solución propuestos y el método analítico.

En el análisis del comportamiento del sistema puede verse que con 1000 incrementos de tiempo hasta los 50 minutos el objeto que recibe energía en forma de calor ya alcanzó su temperatura máxima que es la temperatura del medio circundante. Los dos métodos en estudio concuerdan a simple vista con el método analítico. En los errores se observa que el Método de Euler tiene un valor cercano al 0.25% mientras que el Runge-Kutta 4 orden tiene un error porcentual de cero indicando que se adecua a la solución analítica.

Iteración	Tiempo	Euler	RGK4	Analítico	K1	K2	K3	K4	Error Euler	Error RGK4
0	0	20.8	20.7960133	20.7960133	0.7960133	0.7960133	0.7960133	0.7960133	0	0
1	0.05	21.592	21.5841061	21.5841061	0.78415894	0.78025775	0.77635636	0.77249405	0.0191705	3.2001E-10
2	0.1	22.37608	22.3643573	22.3643573	0.77635636	0.77249405	0.76863149	0.76480761	0.05241682	6.1059E-10
3	0.15	23.1523192	23.1368449	23.1368449	0.76863149	0.76480761	0.76098348	0.75719765	0.06688177	1.1167E-09
4	0.2	23.920796	23.901646	23.901646	0.76098348	0.75719765	0.75341156	0.74966324	0.08011987	1.3377E-09
5	0.25	24.681588	24.6588373	24.6588373	0.75341156	0.74966324	0.74591499	0.74220413	0.09221699	1.5405E-09
6	0.3	25.4347722	25.4084944	25.4084944	0.74591499	0.74220413	0.73849301	0.73481907	0.10342116	1.7268E-09
7	0.35	26.1804244	26.1506923	26.1506923	0.73849301	0.73481907	0.73114469	0.7275075	0.11369549	1.8894E-09
8	0.4	26.92892103	26.8855052	26.8855052	0.73114469	0.7275075	0.72386987	0.72025058	0.12317054	2.0567E-09
9	0.45	27.649434	27.6130066	27.6130066	0.72386987	0.72025058	0.71666731	0.71308397	0.13192132	2.2029E-09
10	0.5	28.3729997	28.3332692	28.3332692	0.71666731	0.71308397	0.70953629	0.70600641	0.14001379	2.3381E-09
11	0.55	29.0892103	29.0463651	29.0463651	0.70953629	0.70600641	0.70247629	0.7000000	0.14750624	2.4632E-09
12	0.6	29.7963182	29.7523655	29.7523655	0.70247629	0.69896396	0.69549853	0.69205654	0.15445035	2.5792E-09
13	0.65	30.500336	30.4513412	30.4513412	0.69549853	0.69205654	0.68866632	0.68512355	0.16089213	2.6869E-09
14	0.7	31.1953316	31.1433619	31.1433619	0.68866632	0.68512355	0.68171497	0.67830646	0.16687262	2.7868E-09
15	0.75	31.8833783	31.8284969	31.8284969	0.68171497	0.67830646	0.67493318	0.67157407	0.17242859	2.8797E-09
16	0.8	32.5645445	32.5068147	32.5068147	0.67493318	0.67157407	0.66821611	0.66489179	0.17759309	2.9666E-09
17	0.85	33.2388991	33.1783831	33.1783831	0.66821611	0.66489179	0.66156725	0.65825947	0.18239586	3.0463E-09
18	0.9	33.9065101	33.8432693	33.8432693	0.66156725	0.65825947	0.65498455	0.65170968	0.18686377	3.1212E-09
19	0.95	34.5674445	34.5015398	34.5015398	0.65498455	0.65170968	0.64846734	0.64524127	0.19102115	3.1905E-09
20	1	35.2217705	35.1532603	35.1532603	0.64846734	0.64524127	0.64201498	0.63868909	0.19489009	3.2552E-09
997	49.85	99.9964406	99.9962574	99.9962574	3.7428E-05	3.7238E-05	3.724E-05	3.7054E-05	0.00018319	3.1407E-12
998	49.9	99.9964762	99.9962946	99.9962946	3.7054E-05	3.6868E-05	3.6869E-05	3.6685E-05	0.00018155	3.1123E-12
999	49.95	99.9965114	99.9963315	99.9963315	3.6685E-05	3.6502E-05	3.6502E-05	3.632E-05	0.00017992	3.0839E-12
1000	50	99.9965463	99.996368	99.996368	3.632E-05	3.6138E-05	3.6139E-05	3.5959E-05	0.0001783	3.0554E-12

Figura 2 Resultados numéricos del problema planteado.

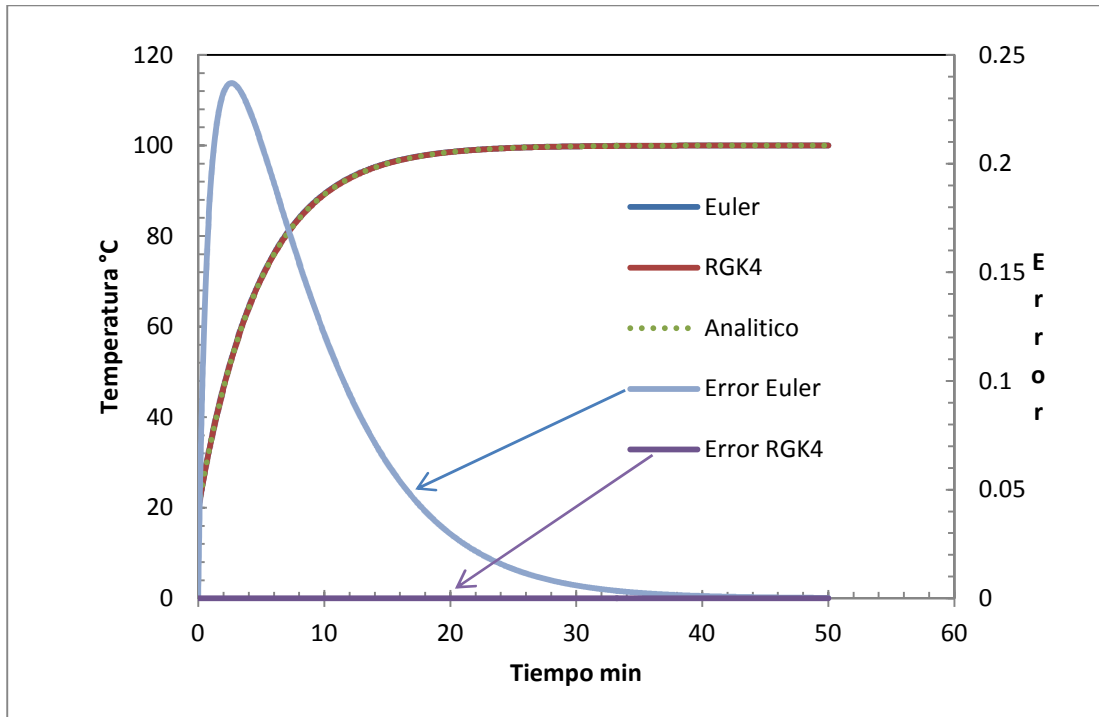


Figura 3.- Comportamiento de objeto calentándose ley de Newton y contraste con metodologías numéricas Euler y Runge-Kutta 4 orden.

#### 4.- Conclusión

Las metodologías empleadas con un incremento de 0.05 es adecuada en los dos casos.

Puede establecerse que la metodología de Euler genera un error que tiende a crecer mientras exista una razón de cambio, cuando se tiende a un valor determinado, el error tiende a desaparecer.

El empleo de la metodología Runge-Kutta 4 orden genera prácticamente los mismos datos que el empleo de la solución analítica.

Puede emplearse estas metodologías en solución de ecuaciones diferenciales más complejas.

El empleo de la hoja de cálculo requiere solamente trabajar con el algoritmo, empleando ecuaciones básicas sin la necesidad de uso de comandos especiales como los utilizados en lenguajes de cómputo específicos.

## **5.- Bibliografía**

(1).- Numerical Analysis, Ninth Edition, Richard L. Burden and J. Douglas Faires